Eine neue und leichte Methode, nicht nur die Wurzeln selbst sondern auch beliebige Potenzen derer aller algebraischen Gleichungen mittels gefälliger Reihen auszudrücken*

Leonhard Euler

§1 Der erste, welcher diesen Gegenstand mit sehr glücklichem Erfolg behandelt hat, war der brillanteste, vor kurzem verstorbene, Lambert, der Reihen von dieser Art für trinomische Gleichungen mit einer völlig einzigartigen über Approximationen vorgehenden Methode gefunden hat. Aber diese Methode verlangte höchst aufwändige und beschwerliche Rechnungen, sodass er nach dem Fund einiger anfänglicher Terme die Rechnung nicht weiter verfolgen konnte, sondern nur aus der außergewöhnlichen Struktur, welche in den ersten Termen beobachtet wurde, mit Induktion versucht hat, die folgenden zu erschließen. Deswegen habe ich schon zu jener Zeit viel Mühe darauf verwendet, nach einer direkten und klaren Methode zu suchen, welche zu denselben Reihen führen würde.

*Originaltitel: "Methodus nova ac facilis omnium aequationum algebraicarum radices non solum ipsas sed etiam quascumque earum potestates per series concinnas exprimendi", zuerst publiziert in: *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae, Band 12* (1801, geschrieben 1778): pp. 71 – 90, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 6, pp. 447 – 464, Eneström Nummer E711, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

§2 Auf eine Methode von dieser Art bin ich aber nicht viel später gestoßen, welche ich in COMMENTARIORUM NOVORUM TOMO XV. genauer erläutert habe, wo ich im Allgemeinen eine in dieser Form enthaltene Gleichung

$$1 = \frac{A}{x} - \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} - \frac{D}{x^4} + \frac{E}{x^4} - \text{etc.}$$

betrachtet habe; wenn deren Wurzeln α, β, γ etc. sind, ist bekannt, dass deren Summe $= A$ ist, die Summe der Quadrate $= A^2 - 2B$, die Summe der Kuben $= A^3 - 3AB + 3C$, und so weiter. Daher habe ich also für die Summe irgendwelcher Potenzen $\alpha^n + \beta^n + \gamma^n + \delta^n +$ etc. einen ähnlichen Ausdruck ermittelt, dessen Fortschreitungsgesetz ich beobachtet habe auch auf das Unendliche verallgemeinert zu werden; obwohl dennoch für jedweden Fall nur die Terme angenommen werden müssen, die von Brüchen befreit sind; daher kam mir der Gedanke, nach den Werten dieser Reihen, wenn sie ins Unendliche fortgesetzt werden, zu suchen. Bald habe ich aber mit einer leichten Überlegung eingesehen, dass dieselbe Summe die Potenz der größten Wurzel, sei sie α^n, bestimmt.

§3 Nachdem ich also die unendliche Reihe erhalten hatte, welche die Potenz mit Exponenten n der größten Wurzel, also α, ausdrückt, habe ich schnell erkannt, dass diese Reihe überaus mit der LAMBERT'SCHEN übereinstimmt; aber dann war es nicht weiter schwer, ähnliche Reihen aller in dieser viel allgemeineren Form enthaltenen Gleichungen

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.}$$

darzubieten, wo sich den Exponenten α, β, γ, δ etc. sogar gänzlich alle Werte, ob positiv oder negativ, ob ganzzahlig oder gebrochen, zuteilen lassen. Nichtsdestoweniger schreiten die einzelnen Terme dieser Reihe überaus strukturiert fort und diese ließen sich sogar beliebig weit fortsetzen, sodass hier überhaupt nichts der Induktion oder einer Vermutung eingeräumt werden muss.

§4 Weil aber diese Methode aus völlig fremden Prinzipien und über nicht gerade unaufwändigen Wege abgeleitet worden ist, habe ich mich sehr bemüht, eine direktere und leichter zum Ziel führende Methode zu entwickeln; ja, ich habe meine Bemühungen sogar in einigen in der Akademie gelesen Dissertationen genauer ausgeführt. Nun aber denselben Gestand erneut behandelnd bin ich auf eine weit einfachere und keine Umschweife benötigende Methode gestoßen, welche ich beschlossen habe, an dieser Stelle genauer zu erläutern.

§5 Hier werde ich also eine in dieser sehr allgemeinen Form enthaltene algebraische Gleichung

$$1 = \frac{A}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.}$$

betrachten, wo vor allem leicht klar ist, dass ohne jegliche Einschränkung anstelle des Buchstaben A die Einheit geschrieben werden kann, sodass die Gleichung, welche ich hier zu behandeln unternehme,

$$1 = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \text{etc.}$$

ist, aus welcher sofort ersichtlich ist, wenn die Buchstaben B, C, D etc. verschwänden, dass $x = 1$ sein wird; daher folgt, dass im Allgemeinen die Wurzel x gewiss einer unendlichen Reihe gleich gesetzt werden muss, deren erster Term die Einheit ist, aber die folgenden Buchstaben B, C, D etc. auf beliebige Art miteinander verknüpft erfasst werden, weil in sie ja außer diesen einzelnen Buchstaben selbst alle Produkte aus zweien sowie dreien und mehreren eingehen müssen.

§6 Weil es mir aber hier zur Aufgabe gestellt ist, nicht nur die Wurzel x selbst, sondern im Allgemeinen eine beliebige Potenz x^n von ihr zu finden, werde ich die Gleichung in dieser Form darstellen

$$x^n - x^{n-\alpha} = Bx^{n-\beta} + Cx^{n-\gamma} + Dx^{n-\delta} + \text{etc.},$$

wo ich den ersten Term von der rechten auf die linke Seite gebracht habe, damit auf der rechten nur die Buchstaben B, C, D etc. zusammen mit ihren Potenzen auftreten, aus deren Mischung der wahre Wert der Potenz x^n ausfindig gemacht werden muss; hier wird leicht erkannt, eine Reihe von welcher Art für x^n hervorgehen muss, in welcher nach dem ersten Term 1 nicht nur die einzelnen Buchstaben B, C, D etc. sondern auch alle Produkte so aus zweien wie aus dreien oder mehreren auftreten müssen, sodass die ganze Aufgabe darauf zurückgeht, dass für diese einzelnen Produkte die entsprechenden Koeffizienten angegeben werden, welche natürlich hauptsächlich vom Exponenten n abhängen werden, neben den gegebenen Exponenten α, β, γ, δ, ε etc. versteht sich.

§7 Hier wird es aber überaus förderlich sein, diese Koeffizienten mit geeigneten Zeichen darzustellen, mit welchen natürlich jede Verwirrung aus der zu entspringenden unendlichen Menge an Termen vermieden werden kann. So werde ich die Koeffizienten der Buchstaben B, C, D etc., sofern sie auf die Potenz mit Exponenten n bezogen werden, mit diesen Zeichen anzeigen $(\overset{n}{B})$, $(\overset{n}{C})$, $(\overset{n}{D})$ etc. Daher, wenn irgendein anderer Exponent, zum Beispiel m, vorgelegt werden würde, wären diese Koeffizienten so zu bezeichnen $(\overset{m}{B})$, $(\overset{m}{C})$, $(\overset{m}{D})$ etc., welches selbe über alle aus zwei oder mehreren dieser Buchstaben zusammengesetzten Produkte festzuhalten ist. Wie wenn beispielsweise im Allgemeinen dieses Produkt $B^bC^cD^d$ etc. auftritt, werde ich für die Potenz mit Exponent n so darstellen $(B^bC^c\overset{n}{D^d}\text{etc.})$.

§8 Nach Einführen dieser Bezeichnungsweise wird der Wert der gesuchten Potenz x^n mit einer Reihe von dieser Weise ausgedrückt werden

$$\begin{aligned} x^n = 1 &+ (\overset{n}{B})B + (\overset{n}{C})C + (\overset{n}{D})D + (\overset{n}{E})E + \text{etc.} \\ &+ (\overset{n}{B^2})B^2 + (\overset{n}{C^2})C^2 + (\overset{n}{D^2})D^2 + (\overset{n}{E^2})E^2 + \text{etc.} \\ &+ (\overset{n}{BC})BC + (\overset{n}{BD})BD + (\overset{n}{BE})BE + \text{etc.} \\ &\quad \text{etc.,} \end{aligned}$$

der allgemeine Term welcher Reihe, welcher gänzlich alle in sich umfasst,

$$(B^bC^c\overset{n}{D^d}E^e\text{etc.})B^bC^cD^dE^e\text{etc.}$$

sein wird.

§9 Damit es aber nicht nötig ist, die Rechnung an mehrere dieser Terme zugleich anzupassen, geht die Hauptaufgabe darauf zurück, dass wir lehren, diese einzelnen Koeffizienten aus den kleineren schon bekannten Termen ausfindig zu machen. Und wenn zuerst freilich der Koeffizient $(\overset{n}{B})$ oder der Term $(\overset{n}{B})B$ für die Potenz x^n gesucht wird, ist es ersichtlich, dass für $x^{n-\alpha}$

dieser Term $\overset{n-\alpha}{(B)}B$ sein wird, woher aus der Gleichung selbst, sofern hier nur über die Terme der Form B gesprochen wird, wird

$$\overset{n}{(B)}B - \overset{n-\alpha}{(B)}B = Bx^{n-\beta} = B$$

sein, weil die Potenz $x^{n-\beta}$ keinen dieser Buchstaben beinhalten darf und daher für $x^{n-\beta}$ natürlich die Einheit als erster Teil des wahren Werts geschrieben werden muss. Weil ja hier nun durch B geteilt werden kann, werden wir für den gesuchten Koeffizienten $\overset{n}{(B)}$ diese Gleichung haben

$$\overset{n}{(B)} - \overset{n-\alpha}{(B)} = 1;$$

in gleicher Weise haben wir für die übrigen diese Gleichungen:

$$\overset{n}{(C)} - \overset{n-\alpha}{(C)} = 1, \quad \overset{n}{(D)} - \overset{n-\alpha}{(D)} = 1, \quad \overset{n}{(E)} - \overset{n-\alpha}{(E)} = 1 \quad \text{etc.}$$

§10 Wenn wir aber den Koeffizienten $\overset{n}{(B^2)}$ suchen, ist es ersichtlich, dass von der rechten Seite der Gleichung allein der Term $Bx^{n-\beta}$ in die Rechnung eingeht, weil hier keine anderen Buchstaben auftreten. Es wird also

$$\overset{n}{(B^2)}B^2 - \overset{n-\alpha}{(B^2)}B^2 = \overset{n-\beta}{(B^2)}B^2$$

sein; also nach Teilen durch B^2

$$\overset{n}{(B^2)} - \overset{n-\alpha}{(B^2)} = \overset{n-\beta}{(B^2)}.$$

In gleicher Weise wird

$$\overset{n}{(C^2)} - \overset{n-\alpha}{(C^2)} = \overset{n-\gamma}{(C^2)}$$

sein, dann aber

$$\overset{n}{(D^2)} - \overset{n-\alpha}{(D^2)} = \overset{n-\delta}{(D^2)}.$$

etc.

§11 Wenn aber weiter der Koeffizient $\overset{n}{(BC)}$ oder der Term $\overset{n}{(BC)}BC$ gesucht wird, ist es offenkundig, dass von der rechten Seite der Gleichung die beiden Terme $Bx^{n-\beta}$ und $Cx^{n-\gamma}$ hier zur Hilfe genommen werden müssen. Damit nämlich die Form BC resultiert, muss für den ersten Teil für $x^{n-\beta}$ ja $\overset{n-\beta}{(C)}$ genommen werden, für den zweiten muss aber anstelle von $x^{n-\gamma}$ dann $\overset{n-\gamma}{(B)}B$ geschrieben werden und so wird unsere Gleichung durch BC geteilt

$$\overset{n}{(BC)} - \overset{n-\alpha}{(BC)} = \overset{n-\beta}{(C)} + \overset{n-\gamma}{(B)}$$

sein. Auf dieselbe Weise wird

$$\begin{aligned}\overset{n}{(BD)} - \overset{n-\alpha}{(BD)} &= \overset{n-\beta}{(D)} + \overset{n-\delta}{(B)},\\ \overset{n}{(CD)} - \overset{n-\alpha}{(CD)} &= \overset{n-\gamma}{(D)} + \overset{n-\delta}{(C)},\end{aligned}$$

und so weiter. Und in ähnlicher Weise ist es ersichtlich, dass

$$\overset{n}{(BCD)} - \overset{n-\alpha}{(BCD)} = \overset{n-\beta}{(CD)} + \overset{n-\gamma}{(BD)} + \overset{n-\delta}{(BC)}$$

und weiter

$$\overset{n}{(BCDE)} - \overset{n-\alpha}{(BCDE)} = \overset{n-\varepsilon}{(BCD)} + \overset{n-\beta}{(CDE)} + \overset{n-\gamma}{(BDE)} + \overset{n-\delta}{(BCE)}$$

sein wird.

§12 Wenn derselbe Buchstabe mehrmals auftritt, haben wir die Quadrate schon entwickelt, für die Kuben werden wir hingegen haben

$$\begin{aligned}\overset{n}{(B^3)} - \overset{n-\alpha}{(B^3)} &= \overset{n-\beta}{(B^2)},\\ \overset{n}{(C^3)} - \overset{n-\alpha}{(C^3)} &= \overset{n-\gamma}{(C^2)},\\ \overset{n}{(D^3)} - \overset{n-\alpha}{(D^3)} &= \overset{n-\delta}{(D^2)},\end{aligned}$$

etc.

Auf dieselbe Weise wird für die höheren Potenzen gelten:

$$\begin{aligned}
\overset{n}{(B^4)} - \overset{n-\alpha}{(B^4)} &= \overset{n-\beta}{(B^4)},\\
\overset{n}{(B^5)} - \overset{n-\alpha}{(B^5)} &= \overset{n-\beta}{(B^4)},\\
\overset{n}{(B^6)} - \overset{n-\alpha}{(B^6)} &= \overset{n-\beta}{(B^5)},
\end{aligned}$$

etc.

§13 Wenn aber mehrere Buchstaben eingehen, werden von der rechten Seite der Gleichungen auch mehrere Terme zur Hilfe genommen werden müssen, wie aus den folgenden Formeln deutlich werden wird:

$$\begin{aligned}
\overset{n}{(B^2C)} - \overset{n-\alpha}{(B^2C)} &= \overset{n-\gamma}{(B^2)} + \overset{n-\beta}{(BC)},\\
\overset{n}{(B^2C^2)} - \overset{n-\alpha}{(B^2C^2)} &= \overset{n-\gamma}{(B^2C)} + \overset{n-\beta}{(BC^2)},\\
\overset{n}{(B^3C)} - \overset{n-\alpha}{(B^3C)} &= \overset{n-\gamma}{(B^3)} + \overset{n-\beta}{(B^2C)},\\
\overset{n}{(B^3C)} - \overset{n-\alpha}{(B^3C^2)} &= \overset{n-\gamma}{(B^3C)} + \overset{n-\beta}{(B^2C^2)},\\
\overset{n}{(B^3C^3)} - \overset{n-\alpha}{(B^3C^3)} &= \overset{n-\gamma}{(B^3C^2)} + \overset{n-\beta}{(B^2C^3)}.
\end{aligned}$$

In gleicher Weise ist es ersichtlich, dass

$$\overset{n}{(B^3C^2D)} - \overset{n-\alpha}{(B^3C^2D)} = \overset{n-\beta}{(B^2C^2D)} + \overset{n-\gamma}{(B^3CD)} + \overset{n-\delta}{(B^3C^2)}$$

sein wird. Und diese Beispiele reichen mehr als aus, um diese Koeffizienten von gänzlich allen Produktion mit Gleichungen von dieser Art auszudrücken.

§14 Aber durch solche Gleichungen wird die Untersuchung von komplexeren Koeffizienten auf die Koeffizienten von einfacheren Produkten zurückgeführt, welche sich als schon bekannt betrachten lassen, weil ja von der Bestimmung der einfacheren ausgehend die Operationen beginnen. Wenn natürlich irgendein gesuchter Koeffizient mit $\varphi : n$ ausgedrückt wird, weil er ja als Funktion von n angesehen werden kann, wird die Auflösung dieser Gleichungen auf diese Form zurückgeführt

$$\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = \Pi,$$

wo Π eine schon bekannte Funktion des Buchstaben n ist. Aber wir werden bald sehen, dass die Auflösung dieser Gleichung für unser Unterfangen ziemlich angenehm stattfinden kann.

§15 Die Auflösung dieser Gleichung ist zum Kalkül mit endlichen Differenzen zu rechnen und wird genauso wie die Differentiale eine beliebige konstante Größe erhalten. Damit also daher nichts im Ungewissen bleibt, ist vor allem sorgfältig zu bemerken, dass alle Koeffizienten, welche wir suchen, so beschaffen sein müssen, dass sie für $n = 0$ gesetzt verschwinden. Weil nämlich in diesem Fall $x^n = 1$ wird und daher dem ersten Term unserer Reihe gleich, werden alle Terme, die die Buchstaben B, C, D etc. beinhalten, in diesem Fall verschwinden müssen; daher ist es notwendig, dass deren Koeffizienten den Faktor n beinhalten.

§16 Die allgemeine Auflösung dieser Gleichung $\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = \Pi$ brächte wenig an Hilfe bei dieser Aufgabe. Aber es ist eine für unser Unterfangen besonders treffliche partikuläre Lösung gegeben, welche sehr förderlich sein wird, sie hier entwickelt zu haben . Während natürlich n' die variable Größe n um eine gewisse Konstante c entweder vermindert oder vergrößert bezeichnet, sodass $n' = n \pm c$ ist, wenn

$$\varphi : n = \Delta n(n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \cdots (n' + i\alpha)$$

war, wo Δ eine konstante Größe bedeutet, wird

$$\varphi : (n - \alpha) = \Delta(n - \alpha)n'(n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \cdots (n' + (i - 1)\alpha)$$

sein, woher wegen der gemeinsamen Faktoren $(n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \cdots (n' + (i - 1)\alpha)$

$$\begin{aligned} \varphi : n - \varphi : (n - \alpha) &= \Delta(n'n + in\alpha - n'n + \alpha n') \cdots \\ &= \Delta\alpha(n' + in)(n' + \alpha)(n' + 2\alpha) \cdots (n' + (i - 1)\alpha) \end{aligned}$$

sein wird, welcher Ausdruck also jener Größe Π gleich werden wird, woher wir das folgende Lemma hier als Fundament aufstellen wollen.

LEMMA

§17 *Nach Vorlage der aufzulösenden Gleichung*

$$\varphi : n - \varphi : (n - \alpha) = \Pi,$$

sofern diese Größe Π *in dieser Form enthalten ist*

$$\Pi = \Delta\alpha(n' + in)\{(n' + \alpha)(n' + 2\alpha)(n' + 3\alpha)\cdots(n' + (i-1)\alpha)\},$$

wird dann immer

$$\varphi : n = \Delta n(n' + \alpha)(n' + 2\alpha)\cdots(n' + i\alpha)$$

sein, während $n' = n \pm c$ *ist.*

Diese Form ist schon so beschaffen, dass sie für $n = 0$ verschwindet, und so für das Bestimmen der gesuchten Koeffizienten überaus geeignet.

§18 Nun werden sich mithilfe dieses Lemmas all unsere Koeffizienten hinreichend schnell bestimmen lassen; und weil die höher zusammengesetzten immer aus den einfacheren abgeleitet werden müssen, wollen wir alle Terme der allgemeinen Reihe, die wir suchen, für die unbestimmte Potenz x^n in bestimmte Ordnungen einteilen, deren erste all die Buchstaben, welche B, C, D etc. selbst enthalten, erfasst; zur zweiten Ordnung wollen wir die Produkte aus zwei von diesen Buchstaben zählen, von welcher Art B^2, BC, C^2 etc. sind; die dritte Ordnung enthalte das Produkt aus dreien, von welcher Art B^3, B^2C, BCD etc. sind; die vierte Ordnung die Produkte aus vier und so weiter. Für diese einzelnen Ordnungen wollen wir also die Koeffizienten ausfindig machen.

UNTERSUCHUNG DER TERME DER ERSTEN ORDNUNG

§19 Von all diesen Termen ist die einzige Form B, für deren Koeffizienten wir oben diese Gleichung hatten

$$\overset{n}{(B)} - \overset{n-\alpha}{(B)} = 1;$$

daher wird für $\overset{n}{(B)} = \varphi : n$ gesetzt hier $\Pi = 1$ sein. Man nehme also im vorausgeschickten Lemma $\varphi : n = \Delta n$, sodass hier $i = 0$ ist, und weil ja daher $\varphi : (n - \alpha) = \Delta(n - \alpha)$ wird, wird

$$\Pi = \Delta\alpha = 1$$

sein, woher $\Delta = \frac{1}{\alpha}$ wird. Deswegen wird unser Koeffizient

$$\overset{n}{(B)} = \Delta\alpha = 1$$

sein, woher $\Delta = \frac{1}{\alpha}$ wird. Deswegen wird unser Koeffizient

$$\overset{n}{(B)} = \frac{n}{\alpha}$$

sein und in ähnlicher Weise wird für die übrigen dieser Ordnung

$$\overset{n}{(C)} = \frac{n}{\alpha}, \quad \overset{n}{(D)} = \frac{n}{\alpha} \quad \text{etc.}$$

sein, sodass die Terme dieser Ordnung

$$\frac{n}{\alpha}B + \frac{n}{\alpha}C + \frac{n}{\alpha}D + \frac{n}{\alpha}E + \text{etc.}$$

sein werden.

UNTERSUCHUNG DER TERME DER ZWEITEN ORDNUNG

§20 Von diesen Termen werden also zwei Formen gegeben sein, entweder B^2 oder BC, deren Koeffizienten also $\overset{n}{(B^2)}$ oder $\overset{n}{(BC)}$ sind, welche ausfindig gemacht werden müssen. Aber für die ersten haben wir schon oben diese Gleichung gefunden

$$\overset{n}{(B^2)} - \overset{n-\alpha}{(B^2)} = \overset{n-\beta}{(B)}$$

haben, sodass nach Setzen von $\overset{n}{(B^2)} = \varphi : n$ dann $\Pi = \overset{n-\beta}{(B)}$ ist. Weil wir also gerade gefunden haben, dass $\overset{n}{(B)} = \frac{n}{\alpha}$ ist, wird

$$\Pi = \frac{n-\beta}{\alpha}$$

sein. Im Lemma werde also $i = 1$, sodass $\varphi : n = \Delta n(n' + \alpha)$ ist, woher

$$\Pi = \Delta\alpha(n' + n) = \frac{n - \beta}{\alpha}$$

entspringt. Daher wird nach Wiedereinsetzen von $n' = n + c$ auch $\frac{n-\beta}{\alpha} = \Delta\alpha(2n + c)$ sein, woher folgt, dass $2\Delta\alpha n = \frac{n}{\alpha}$ und $\Delta\alpha c = -\frac{\beta}{\alpha}$ ist, woher $\Delta = \frac{1}{2\alpha\alpha}$ und $c = -\frac{\beta}{\Delta\alpha\alpha} = -2\beta$ wird, sodass $n' = n - 2\beta$ wird.

§21 Weil also $\Delta = \frac{1}{2\alpha\alpha}$ und $n' = n - 2\beta$ ist, wird der gesuchte Koeffizient von B^2, natürlich $(\overset{n}{B^2})$,

$$= \frac{n(n + \alpha - 2\beta)}{2\alpha\alpha} = \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 2\beta}{2\alpha}$$

sein. Daher werden die Terme der zweiten Ordnung der Form B^2 die folgenden sein

$$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 2\beta}{2\alpha} B^2 + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 2\gamma}{2\alpha} C^2 + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - 2\delta}{2\alpha} D^2 + \text{etc.}$$

§22 Für die andere Form BC haben wir oben diese Gleichung angeführt

$$(\overset{n}{BC}) - (\overset{n-\alpha}{BC}) = (\overset{n-\beta}{C}) + (\overset{n-\gamma}{B}).$$

Weil also $(\overset{n}{B}) = (\overset{n}{C}) = \frac{n}{\alpha}$ ist, wird, wenn wir $\overset{n}{BC} = \varphi : n$ setzen,

$$\Pi = \frac{n - \beta}{\alpha} + \frac{n - \gamma}{\alpha} = \frac{2n - \beta - \gamma}{\alpha}$$

sein. In unserem Lemma wollen wir $i = 1$ nehmen, dass $\varphi : n = \Delta n(n' + \alpha)$ ist, und es muss $\Delta\alpha(n' + n) = \frac{2n-\beta-\gamma}{\alpha}$ werden. Man nehme also zuerst $n' = n - \beta - \gamma$, dass $\Delta\alpha = \frac{1}{\alpha}$ und daher $\Delta = \frac{1}{\alpha\alpha}$ wird, und so wird der gesuchte Koeffizient

$$(\overset{n}{BC}) = \frac{n(n + \alpha - \beta - \gamma)}{\alpha\alpha} = \frac{2n}{\alpha} \cdot \frac{n + \alpha - \beta - \gamma}{2\alpha}$$

sein.

§23 Daher werden also für die zweite Ordnung die Terme der Form BC

$$\overset{n}{(BC)} = \frac{2n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\gamma}{2\alpha}$$

und daher

$$\frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\gamma}{2\alpha} 2BC + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\delta}{2\alpha} 2BD + \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\gamma-\delta}{2\alpha} 2CD + \text{etc.}$$

sein; wenn diesen die gerade zuvor gefundenen Termen der Form B^2 hinzugefügt werden, ist die ganze zweite Ordnung dadurch schon abgehandelt.

Untersuchung der Terme der dritten Ordnung

§24 Die erste in dieser Ordnung auftretende Form ist B^3, für deren Koeffizienten wir oben diese Gleichung erhalten haben

$$\overset{n}{(B^3)} - \overset{n-\alpha}{(B^3)} = \overset{n-\beta}{(B^2)}.$$

Weil wir also gerade

$$\overset{n}{(B^2)} = \frac{n(n+\alpha-2\beta)}{\alpha \cdot 2\alpha}$$

gefunden haben, wird hier

$$\overset{n-\beta}{(B^2)} = \Pi = \frac{n-\beta}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha}$$

sein. Daher wollen wir im vorausgeschickten Lemma $i = 2$ nehmen, dass daher

$$\Pi = \Delta\alpha(n'+2n)(n'+\alpha)$$

wird. Damit also die ersten Faktoren gleich werden, muss $n' = n - 3\beta$ gesetzt werden, nach Wegschaffen welches gemeinsamen Faktors diese Gleichung zurückbleiben wird

$$\Delta\alpha(n'+2n) = \Delta\alpha(3n-3\beta) = \frac{n-\beta}{2\alpha^2}.$$

Hier gelingt also die Teilung durch $n-\beta$ auf angenehme Weise, sodass daher $\Delta = \frac{1}{6\alpha^2}$ wird. Und so wird der Koeffizient

$$\overset{n}{(B^3)} = \frac{n(n+\alpha-3\beta)(n+2\alpha-3\beta)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha}$$

sein, woher per se klar ist, dass der Koeffizient des Terms C^3

$$\overset{n}{(C^3)} = \frac{n(n+\alpha-3\gamma)(n+2\alpha-3\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha}$$

sein wird.

§25 Die zweite Form dieser Ordnung wird B^2C sein, für deren Koeffizienten wir oben diese Gleichung gefunden haben

$$\overset{n}{(B^2C)} - \overset{n-\alpha}{(B^2C)} = \overset{n-\gamma}{(B^2)} + \overset{n-\beta}{(BC)} = \Pi;$$

also leiten wir aus den schon gefundenen Werten diese zwei Teile ab:

$$\overset{n-\gamma}{(B^2)} = \frac{(n-\gamma)(n+\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha},$$

weiter

$$\overset{n-\beta}{(BC)} = \frac{2(n-\beta)(n+\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha},$$

wo es ersichtlich ist, dass die letzten Faktoren einander gleich hervorgehen mussten; daher wird aus der Addition

$$\Pi = \frac{(3n-2\beta-\gamma)(n+\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha\cdot 2\alpha}$$

entspringen. In unserem Lemma muss $i=2$ genommen werden und daher wird

$$\Pi = \Delta\alpha(n'+2n)(n'+\alpha)$$

werden; daher, damit die letzten Faktoren übereinstimmen, muss $n' = n - 2\beta-\gamma$ genommen werden, nach Wegschaffen von welchen diese Gleichung zurückbleiben wird

$$\frac{3n-2\beta-\gamma}{2\alpha^2} = \Delta\alpha(3n-2\beta-\gamma),$$

wo wiederum die Teilung durch $3n - 2\beta - \gamma$ gelingt, sodass daher $\Delta = \frac{1}{2\alpha^3}$ ist. Als logische Konsequenz wird der gesuchte Koeffizient

$$\overset{n}{(B^2C)} = \frac{n(n+\alpha-2\beta-\gamma)(n+2\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha \cdot 2\alpha \cdot \alpha}$$

oder auf diese Weise

$$\frac{1}{3}\overset{n}{(B^2C)} = \frac{n(n+\alpha-2\beta-\gamma)(n+2\alpha-2\beta-\gamma)}{\alpha \cdot 2\alpha \cdot 3\alpha}$$

sein.

§26 Schließlich ist die dritte Form dieser Ordnung BCD, für deren Koeffizient oben diese Gleichung gegeben worden ist

$$\overset{n}{(BCD)} - \overset{n-\alpha}{(BCD)} = \overset{n-\beta}{(CD)} + \overset{n-\gamma}{(BD)} + \overset{n-\delta}{(BC)} = \Pi,$$

so dass hier Π aus drei Teilen zusammengesetzt ist, welche auf die gegenwärtigen Indizes zurückgeführt sein werden:

$$\begin{aligned}
\overset{n-\beta}{(CD)} &= \frac{2(n-\beta)(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha \cdot 2\alpha},\\
\overset{n-\gamma}{(BD)} &= \frac{2(n-\gamma)(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha \cdot 2\alpha},\\
\overset{n-\delta}{(BC)} &= \frac{2(n-\delta)(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha \cdot 2\alpha};
\end{aligned}$$

hier ist es ersichtlich, dass die letzten Faktoren notwendig einander gleich hervorgehen mussten. Und so wird nach Zusammenfassen von diesen

$$\Pi = \frac{2(3n-\beta-\gamma-\delta)(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha \cdot 2\alpha}$$

sein. In unserem Lemma muss also $i = 2$ genommen werden, dass daher

$$\Pi = \Delta\alpha(n' + 2n)(n' + \alpha)$$

hervorgeht, wo natürlich $n' = n - \beta - \gamma - \delta$ genommen werden muss; und so werden auch die ersten Faktoren beseitigt werden können und daher wird man folgern, dass $\Delta = \frac{1}{\alpha^3}$ sein wird. Als logische Konsequenz wird der gesuchte Koeffizient des Produkts BCD

$$\overset{n}{(BCD)} = \frac{6n(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta)(n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta)}{\alpha\cdot 2\alpha\cdot 3\alpha}$$

sein.

Untersuchung der Terme der vierten Ordnung

§27 Die erste in dieser Ordnung auftretende Form, wannimmer natürlich alle vier Faktoren einander gleich sind, ist B^4, für deren Koeffizienten oben diese Gleichung gegeben worden ist

$$\overset{n}{(B^4)} - \overset{n-\alpha}{(B^4)} = \overset{n-\beta}{(B^3)} = \Pi.$$

Weil wir also gerade

$$\overset{n}{(B^3)} = \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-3\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-3\beta}{3\alpha}$$

gefunden haben, wird

$$\overset{n-\beta}{(B^3)} = \frac{n-\beta}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha} = \Pi$$

sein. Weil man hier drei Faktoren hat, muss im vorausgeschickten Lemma $i = 3$ genommen werden und daher wird

$$\Pi = \Delta\alpha(n'+3n)(n'+\alpha)(n'+2\alpha)$$

entspringen; hier heben sich zwei letzten Faktoren von selbst auf, indem man $n = n - 4\beta$ setzt; dann wird aber diese Gleichung zurückgelassen werden

$$\frac{n-\beta}{6\alpha^3} = 4\Delta\alpha(n-\beta),$$

woher $\Delta = \dfrac{1}{24\alpha^4}$ wird. Und so wird der gesuchte Koeffizient für die Form B^4

$$\overset{n}{(B^4)} = \frac{n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-4\beta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-4\beta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-4\beta}{4\alpha}$$

sein.

§28 Die zweite hier auftretende Form ist B^3C, für deren Koeffizienten wir oben diese Gleichung gegeben haben

$$\overset{n}{(B^3C)} - \overset{n-\alpha}{(B^3C)} = \overset{n-\gamma}{(B^3)} + \overset{n-\beta}{(B^2C)} = \Pi.$$

Man sammle also aus den oben gefundenen Formen diese zwei Teile und man wird

$$\overset{n-\gamma}{(B^3)} = \frac{n-\gamma}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha},$$

$$\overset{n-\beta}{(B^2C)} = \frac{3(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha}$$

finden; daher entspringt

$$\Pi = \frac{4n-3\beta-\gamma}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha}.$$

Im Lemma muss also für diesen Fall $i = 3$ genommen werden, dass daraus

$$\Pi = \Delta\alpha(n'+3n)(n'+\alpha)(n'+2\alpha)$$

hervorgeht, wo sofort klar ist, dass $n' = n - 3\beta - \gamma$ genommen werden muss; und auf diese Weise lassen alle den Buchstaben n beinhaltenden Faktoren es zu weggeschafft zu werden, wonach man $\Delta = \frac{1}{6\alpha^4}$ finden wird. Als logische Konsequenz wird der gesuchte Koeffizient der Form B^3C

$$\overset{n}{(B^3C)} = \frac{4n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-3\beta-\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-3\beta-\gamma}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-3\beta-\gamma}{4\alpha}$$

sein.

§29 Die dritte Form in dieser Ordnung ist B^2C^2, für deren Koeffizienten oben diese Gleichung gegeben worden ist

$$\overset{n}{(B^2C^2)} - \overset{n-\alpha}{(B^2C^2)} = \overset{n-\gamma}{(B^2C)} + \overset{n-\beta}{(BC^2)} = \Pi.$$

Hier wird aber zuerst

$$\overset{n-\gamma}{(B^2C)} = \frac{3(n-\gamma)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha},$$

$$\overset{n-\beta}{(BC^2)} = \frac{3(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha},$$

sein, woher

$$\Pi = \frac{2n-\beta-\gamma}{2\alpha^3}(n+\alpha-2\beta-2\gamma)(n+2\alpha-2\beta-2\gamma)$$

wird. Daher, wenn wir im Lemma $i = 3$ nehmen, muss auch wie zuvor

$$\Pi = \Delta\alpha(n'+3n)(n'+\alpha)(n'+2\alpha)$$

sein muss, wo offenkundig $n' = n-2\beta-2\gamma$ genommen werden muss, wonach man $\Delta = \frac{1}{4\alpha}$ findet. Und so wird der gesuchte Koeffizient dieser Form B^2C^2

$$\overset{n}{(B^2C^2)} = \frac{6n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-2\gamma}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-2\gamma}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-2\beta-2\gamma}{4\alpha}$$

sein.

§30 Die vierte zu dieser Ordnung zu zählende Form ist B^2CD, für deren Koeffizienten aus den oben aufgestellten Prinzipien diese Gleichung festgelegt aufgestellt werden muss

$$\overset{n}{(B^2CD)} - \overset{n-\alpha}{(B^2CD)} = \overset{n-\delta}{(B^2C)} + \overset{n-\gamma}{(B^2D)} + \overset{n-\beta}{(BCD)} = \Pi,$$

und so besteht Π aus diesen drei Teilen

$$\overset{n-\delta}{(B^2C)} = \frac{3(n-\delta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha},$$

$$\overset{n-\gamma}{(B^2D)} = \frac{3(n-\gamma)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha},$$

$$\overset{n-\beta}{(BCD)} = \frac{6(n-\beta)}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha};$$

nach Sammeln von diesen wird also

$$\Pi = \frac{4n-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha^3}(n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta)(n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta),$$

welchem aus dem Lemma heraus dieser Ausdruck

$$\Delta\alpha(n'+3n)(n'+\alpha)(n'+2\alpha)$$

gleich gemacht werden muss, was hervorragend gelingen wird, indem man $n' = n-2\beta-\gamma-\delta$ nimmt; daher wird man nämlich $\Delta = \frac{1}{2\alpha^4}$ berechnen. Als logische Konsequenz wird der entsprechende Koeffizient B^2CD dieser Form so ausgedrückt werden

$$(\overset{n}{B^2CD}) = \frac{12n}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{3\alpha}\cdot\frac{n+3\alpha-2\beta-\gamma-\delta}{4\alpha}.$$

§31 Die letzte Form dieser Ordnung ist $BCDE$, für deren Koeffizienten man diese Gleichung hat

$$(\overset{n}{BCDE}) - (\overset{n-\alpha}{BCDE}) = (\overset{n-\varepsilon}{BCD}) + (\overset{n-\delta}{BCE}) + (\overset{n-\gamma}{BDE}) + (\overset{n-\beta}{CDE}).$$

Wir wollen also hier diese vier Teile entwickeln

$$(\overset{n-\varepsilon}{BCD}) = \frac{6(n-\varepsilon)}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha},$$

$$(\overset{n-\delta}{BCE}) = \frac{6(n-\delta)}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha},$$

$$(\overset{n-\gamma}{BDE}) = \frac{6(n-\gamma)}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha},$$

$$(\overset{n-\beta}{BCD}) = \frac{6(n-\beta)}{\alpha}\cdot\frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha}\cdot\frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha}.$$

Nach Sammeln dieser zu einer einzelnen Summe wird

$$\Pi = \frac{4n-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{\alpha^2}(n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon)(n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon)$$

sein. Daher, damit die für Π gegebene Form des Lemmas dieser Summe gleich wird, muss offenkundig $n' = n - \beta - \gamma - \delta - \varepsilon$ genommen werden, woher $\Delta = \frac{1}{\alpha^4}$ wird. Und so wird der Koeffizient dieser Form $BCDE$

$$(\overset{n}{BCDE}) = \frac{24n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\beta-\gamma-\delta-\varepsilon}{4\alpha}$$

sein.

Allgemeine Schlussfolgerung

§32 Das Gesetz, nach welchem diese Ausdrücke weiter fortschreiten, ist schon so offenkundig, dass es überflüssig wäre, diese Operationen weiter fortzusetzen, was genügen wird, es an einem einzigen Beispiel illustriert zu haben. Es sei also diese Form der neunten Ordnung vorgelegt $B^4C^3D^2$, deren natürlicher Koeffizient, der aus der Lehre der Kombinatorik entnommen abgeleitet werden kann, wie bekannt ist,

$$N = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2}$$

ist. Wenn wir nun der Kürze wegen $4\beta + 3\gamma + 2\delta = \lambda$ setzen, wird der Koeffizient dieser Form für unser Unterfangen

$$(\overset{n}{B^4C^3D^2}) = N \cdot \frac{n}{\alpha} \cdot \frac{n+\alpha-\lambda}{2\alpha} \cdot \frac{n+2\alpha-\lambda}{3\alpha} \cdot \frac{n+3\alpha-\lambda}{4\alpha} \cdot \frac{n+5\alpha-\lambda}{5\alpha} \cdots \frac{n+8\alpha-\lambda}{9\alpha}$$

sein; wenn wir hier anstelle von N den gerade gegebenen Wert einsetzen, werden wir

$$(\overset{n}{B^4C^3D^2}) = \frac{1}{\alpha^9} \cdot \frac{n(n+\alpha-\lambda)(n+2\alpha-\lambda)\cdots(n+8\alpha-\lambda)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2}$$

erhalten.

§33 Daher finden wir nun im Allgemeinen für das Produkt $B^bC^cD^dE^e$ etc. denselben Koeffizienten, welchen ich in einst in Tomo Commentarorum XV aus ganz anderen Prinzipien heraus gefunden hatte; natürlich, wenn die Summe aller Exponenten

$$b + c + d + e + \text{etc.} = i$$

mit welcher Zahl die Ordnung, zu welcher dieses Produkt zuzuordnen ist, angezeigt wird, dann aber

$$b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon + \text{etc.} = \lambda$$

gesetzt wird, wird der Koeffizient dieses Produktes so ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{\alpha^i} \cdot \frac{n(n+\alpha-\lambda)(n+2\alpha-\lambda)(n+3\alpha-\lambda)\cdots(n+(i-1)\alpha-\lambda)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots b\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots c\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots d\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdots e\cdot \text{etc.}}$$

§34 Wenn also alle möglichen Produkte der Buchstaben B, C, D, E etc. mit diesen Koeffizienten zusammen zu einer Summe gesammelt werden und ihr die Einheit vorangestellt wird, hat man den Wert der unbestimmten Potenz x^n, welcher diese algebraische Gleichung zukommt

$$1 = \frac{1}{x^\alpha} + \frac{B}{x^\beta} + \frac{C}{x^\gamma} + \frac{D}{x^\delta} + \frac{E}{x^\varepsilon} + \text{etc.}.$$

§35 In diesen Gleichung haben wir alle Zähler mit den verschiedenen Buchstaben B, C, D, E etc. bezeichnet, weil sie auf verschiedene Potenzen von x bezogen sind. Daher sieht man ein, auch wenn $C = B$ wäre, dass dennoch der Koeffizient des Produkts, welches B^2 wäre, keinesfalls aus der Form $(\overset{n}{B}B)$ entnommen werden darf, sondern immer aus der Form $(\overset{n}{B}C)$ zu entnehmen ist.

§36 Weil wir ja mithilfe dieser Methode den Wert einer gewissen unbestimmten Potenz x^n gebildet haben, ist gewiss nichts leichter als daraus die Wurzel x der vorgelegten Gleichung selbst zu bestimmen, indem man natürlich $x = 1$ setzt. Daher ergibt sich dieses ungewöhnliche Paradoxon, dass dieselbe Methode überhaupt keinen Nutzen gehabt hätte, wenn wir mit ihrer Hilfe die Wurzel x selbst hätten finden wollen, weil das Wesen dieser Methode darin zu sehen ist, dass wir unmittelbar von Beginn an die völlig unbestimmte Potenz x^n betrachtet haben, woher sich die Potenzen aller anderen Potenzen $x^{n-\alpha}$, $x^{n-\beta}$, $x^{n-\gamma}$ etc. ausdrücken ließen. Überdies glaube ich andere außerordentliche Eigenschaften, welche die gerade gebildeten Reihen aufweisen, hier nicht mitteilen zu müssen, weil ich diesen Gegenstand anderenorts schon genauer erforscht habe, an dieser Stelle mir aber das hauptsächliche Anliegen war, eine direkte Methode vorzustellen, diese Reihen hinreichend zügig zu finden.